

TEOREMA VIE

Cédric Villani s-a născut în 1973 la Brive-la-Gaillarde, un orașel din sud-estul Franței, într-o familie de profesori de literatură. Pasionat de matematică din copilărie, studiază la Școala Normală Superioară din Paris, specializându-se în analiză matematică. În 1998 își susține teza de doctorat „Contribuții la studiul matematic al gazelor și plasmelor“, care anunță preocuparea sa pentru matematicile aplicate. În 2000 devine profesor la Școala Normală Superioară din Lyon, iar în 2009 este numit director al Institutului Henri Poincaré.

Pentru contribuțiile sale în domeniul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale din fizica statistică, Cédric Villani a primit Premiul Societății Europene de Matematică (2008), Premiul Fermat (2009), Premiul Henri Poincaré (2009), Medalia Fields (2010).

CÉDRIC VILLANI

TEOREMA VIE

Ilustrații de
CLAUDE GONDARD

Traducere din franceză și cuvânt înainte de
LIVIU ORNEA

 HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Vlad Zografi
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
Corector: Iuliana Glăvan
DTP: Andreea Dobreci, Dan Dulgheru

Tipărit la Monitorul Oficial R.A.

Cédric Villani

Théorème vivant

© Éditions Grasset & Fasquelle, 2012

Portretul Catherinei Ribeiro: © APIS

„La marin et la rose“, versuri de Jean-Marie William Huard, muzică de Claude Pingault:

© Les Éditions Transatlantiques

Extras din „Fragile Things“ de Neil Gaiman, HarperCollins and Headline Review, 2006

© HUMANITAS, 2014, pentru prezenta versiune românească

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

VILLANI, CÉDRIC

Teorema vie / Cédric Villani; trad.: Liviu Ornea. –

București: Humanitas, 2014

ISBN 978-973-50-4282-0

I. Ornea, Liviu (trad.)

51

EDITURA HUMANITAS

Piața Presei Libere 1, 013701 București, România

tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51

www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro

Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro

Comenzi telefonice: 0372 743 382; 0723 684 194

Cuvânt înainte

Cartea pe care tocmai ați deschis-o e una stranie. Inclasabilă. Nu e roman, deci nu trebuie citită cu exigențe literare. Nu e autobiografie, așa că strictă autenticitate nu-i cereți. Piesă de teatru de-ar fi, i s-ar spune „docudramă“. Dar e scrisă în proză, nu-i piesă de teatru (ceea ce nu înseamnă că n-ar putea fi ușor dramatizată sau transformată în scenariu de film). Atunci ce e?

E o mărturie scrisă sub forma unui jurnal, dar cu evidentă finalitate, scrisă din amintiri, deci nu e chiar un jurnal adevărat. E povestea unui an din viața unui matematician de vârf, anul dinaintea primirii Medaliei Fields (echivalentul, în matematică, al Premiului Nobel). E descrierea căutărilor care au dus, într-un final fericit, dar pe care nimeni nu-l putea bănuși de la început, la demonstrarea unei teoreme importante. Recompensa a fost cea mai prestigioasă din matematică.

De ce v-ar interesa povestea asta? Pentru că, dacă veți avea răbdarea s-o parcurgeți până la capăt, veți afla ce înseamnă să faci cercetare de nivel înalt în matematică, veți afla despre aventura uluitoare a facerii unei teoreme, plecând de la primele licăriri ale rezultatului bănușit, de la felul cum, treptat, problema se circumscrie și capătă contururi din ce în ce mai precise, trecând prin momentul în care devine limpede ce e de demonstrat, parcurgând apoi etapa, extrem de anevoioasă, a punerii la punct a tehnicii necesare, a calculelor, până la încheierea demonstrației și la verificarea ei, de către autori, întâi, apoi de către referenții unei reviste de specialitate. E un proces lung – în

cazul acesta, a durat doar un an; pentru demonstrarea Marii Teoreme a lui Fermat, Andrew Wiles a muncit mai mulți ani la rând. Un proces pe parcursul căruia bucuria și extazul înțelegerii, al pătrunderii în adâncul fenomenelor studiate alternează cu groaza de a nu fi înțeles, cu dezamăgirea produsă de un calcul greșit. Un proces pe parcursul căruia mândria de a fi biruit dificultățile urmează umilinței pe care o simți când realizezi că mintea ta nu poate da atât cât îi ceri. E, în definitiv, aventura minții umane în luptă cu ea însăși.

Dar nu e vorba numai despre muncă acerbă, consumată în solitudine. E vorba, în povestea asta, și despre relații umane, despre colaborare între oameni de știință, despre relația dintre mentor și învățăcel – teorema care e personajul principal al cărții e rodul colaborării a doi matematicieni, autorul cărții și un fost doctorand al său. Și mai e vorba despre întreg contextul în care lucrează un matematician, despre atmosfera dintr-un mare institut de cercetări, cum e Institutul de Studii Avansate de la Princeton, despre problemele administrative inerente care nu pot fi ocolite, despre congrese, conferințe – un tablou aproape complet al vieții de cercetător.

Din scrupul de autenticitate, autorul a introdus în carte fragmente din mesajele electronice schimbate cu colaboratorul său și cu alți colegi, a introdus facsimile ale unor pagini din articolele sale. Nu vă speriați dacă, nefiind familiarizați cu matematica, nu veți înțelege nimic din formulele acelea pline de simboluri necunoscute. Nu sunt importante, cartea curge, poate fi citită și fără ele: sunt doar pete de culoare și, probabil, singura ocazie să vedeți cum arată niște pagini dintr-o revistă de matematică.

Să nu vă sperie nici fragmentele în engleză. Tot pentru autenticitate le-a lăsat așa autorul – dar sunt, toate, traduse la sfârșit.

Povestea aceasta nu putea fi spusă fără ca autorul să se refere la o mulțime de nume de matematicieni și fizicieni – do-

meniul său predilect e fizica matematică – și la problemele studiate sau puse de ei. Așa că, pentru înțelegerea textului, autorul a inclus, la sfârșitul unor capitole, scrise cu caractere cursive, pagini în care explică, foarte pe înțeles, deloc tehnic, așa cum numai un savant de calibrul o poate face, noțiunile de matematică și fizică trebuincioase, pagini în care povestește despre probleme celebre, unele încă nerezolvate. În plus, mai sunt mici medalioane dedicate unor figuri importante de matematicieni și fizicieni întâlnite în carte, unii contemporani, alții dispăruți de mult.

Și mai e ceva. Pe lângă povestea în sine, una exemplară pentru matematica de azi, veți descoperi un personaj – autorul însuși. Cartea aceasta vă va convinge că matematicienii nu sunt tipii aceia ciudați care nu știu altceva decât să calculeze și să mormăie ursuzi. Veți vedea că un matematician are preferințe vestimentare, gastronomice, literare, ascultă muzică (ba chiar „muzici“, de multe feluri, poate veți avea și curiozitatea să vă confrunțați preferințele, ascultând câte ceva pe youtube...), are familie, își iubește copiii și se joacă cu ei, le inventează povești, iubește oamenii și comunicarea cu ei – e un om cât se poate de viu și, chiar dacă atipic, un om normal.

Din câte știu, nu mai există o carte asemenea, cel puțin nu despre matematică. Poate va deschide un drum. E scrisă de un mare matematician care se pune pe sine în scenă, dar se privește și din afară, reflectând la meseria și la pasiunea sa, la locul și rolul matematicii în societate. Dacă nu de la vârfurile ei, atunci de la cine să aflăm ceva despre știință?

Liviu Ornea

Lumea mă întrebă adesea cum e viața unui cercetător, a unui matematician, cum e viața noastră de zi cu zi, cum ne scriem opera. Aceasta e întrebarea căreia încercă să-i răspundă cartea de față.

Povestirea urmărește apariția unui pas înainte în matematică, din momentul în care cineva s-a hotărât să se lanseze în această aventură, până când articolul care anunță noul rezultat – noua *teoremă* – e acceptat pentru publicare într-o revistă internațională.

Între aceste două momente, căutările cercetătorilor, departe de a urma o traiectorie rectilinie, se înscriu pe un drum lung, plin de meandre, de înaintări și de reveniri – așa cum se întâmplă adesea în viață.

Cu excepția câtorva modificări ne semnificative cerute de nevoile prezentării, totul în această povestire e conform cu realitatea, cel puțin așa cum am perceput-o eu.

Câteva pasaje mai lungi în engleză sunt traduse la sfârșitul cărții.

Îi mulțumesc lui Olivier Nora pentru că a iscat acest proiect cu ocazia unei întâlniri neprevăzute; îi mulțumesc lui Claire pentru atentele lecturi succesive și pentru sugestii; îi mulțumesc lui Claude pentru frumoasele sale ilustrații; îi mulțumesc lui Ariane Fasquelle și echipei de la Grasset pentru receptivitate și pentru calitatea muncii lor editoriale; în fine,

îi mulțumesc lui Clément pentru colaborarea de neuitat, fără de care această carte n-ar fi avut obiect.

Cititorii și cititoarele sunt bine-veniți să-mi comunice întrebările și comentariile lor pe cale electronică.

Cédric Villani,
Paris, decembrie 2011

Capitolul 1

Lyon, 23 martie 2008

Duminică, ora 13; laboratorul ar fi pustiu fără cei doi matematicieni puși pe treabă. O întâlnire privată pentru o ședință de lucru calmă, în biroul pe care îl ocup de opt ani la etajul al treilea al Școlii Normale Superioare din Lyon.

Așezat într-un fotoliu confortabil, bat darabana pe biroul mare, cu degetele desfășurate ca picioarele unui păianjen, așa cum m-a antrenat pe vremuri profesorul meu de pian.

În stânga mea, pe masa de-alături, un calculator. La dreapta, un dulap cu câteva sute de cărți despre matematică și fizică. În spatele meu, aranjate cu grijă pe rafturi lungi, mii și mii de pagini de articole fotocopyate într-o epocă ancestrală în care revistele științifice nu erau încă electronice; de asemenea, reproduceri ale multor lucrări de cercetare, fotocopyate într-o perioadă în care salariul nu-mi permitea să-mi astâmpăr foamea de cărți. Mai e și un întreg metru liniar de ciorne, arhivate metodic de-a lungul anilor; și încă pe-atât – notițe scrise de mână, martorele nenumăratelor ore petrecute ascultând expuneri științifice. Pe birou, în fața mea, Gaspard, laptopul meu, botezat în onoarea lui Gaspard Monge, marele matematician revoluționar; și un teanc de foi acoperite cu simboluri matematice, mâzgălite în cele patru colțuri ale lumii și adunate special pentru discuția de azi.

Clément Mouhot, complicele meu, ochi sclipitori, stă cu markerul în mână lângă tabla albă enormă care ocupă întreg peretele din fața mea.

— Hai, spune, de ce m-ai chemat, ce-ai de gând? N-ai prea dat detalii în mailul tău...

— Mă las din nou pe mâna vechiului meu demon, e clar că e prea ambițios, e vorba despre regularitatea pentru Boltzmann neomogenă.

— Regularitate condițională? Adică modulo margini de regularitate minimale?

— Nu, fără condiții.

— Nici mai mult, nici mai puțin! Nu în cadru perturbativ? Crezi că suntem pregătiți?

— Da, m-am apucat din nou, am avansat destul de bine, am idei, dar m-am blocat. Am descompus dificultatea cu mai multe modele reduse, dar îmi scapă chiar și cel mai simplu. Credeam că am un argument cu principiul de maxim, dar nu, s-a prăbușit totul. Trebuie să-ți povestesc.

— Dă-i drumul, ascult.

Vorbesc mult: despre rezultatul pe care-l am în minte, despre încercările pe care le-am făcut, despre diferitele bucăți pe care nu reușesc să le pun cap la cap, despre puzzle-ul logic care nu se lasă compus, despre ecuația lui Boltzmann care nu cedează.

Ecuația lui Boltzmann, cea mai frumoasă ecuație din lume, după cum i-am spus unui ziarist! M-a prins când eram mic, adică în timpul tezei, și-am studiat-o pe toate părțile. Găsești orice în ecuația lui Boltzmann: fizică statistică, săgeata timpului, mecanica fluidelor, teoria probabilităților, teoria informației, analiza Fourier... Unii spun că nimeni nu cunoaște mai bine ca mine lumea matematică generată de ecuația asta.

Pe Clément l-am inițiat în universul acesta misterios acum șapte ani, când și-a început teza sub îndrumarea mea. Clément a învățat cu lăcomie și e, cu siguranță, singurul care a citit toate lucrările mele despre ecuația lui Boltzmann; acum e un cercetător respectat, autonom, strălucit și entuziast.

Cu șapte ani în urmă îl ajutam să urce-n șa, acum am eu nevoie de el. Am căzut pe o problemă prea grea, singur n-o

dovedesc; trebuie măcar să-mi pot povesti strădaniile cuiva care are teoria la degetul mic.

— Să presupunem că apar și ciocniri razante, un model fără cut-off. Atunci ecuația se comportă ca o difuzie fracționară, degenerată, desigur, totuși o difuzie, și de îndată ce avem margini pentru densitate și temperatură, ne putem lansa într-o schemă iterativă de tip Moser, adaptată ca să țină seama de caracterul nelocal.

— Schemă Moser? Hmm... Stai, încep să notez.

— De o schemă tip Moser. Cheia e că operatorul lui Boltzmann... e drept că operatorul ăsta e biliniar, e nelocal, totuși, una peste alta, e sub formă de divergență, ceea ce face să meargă schema lui Moser. Faci o schimbare de funcție neliniară, crești puterea... De fapt, ai nevoie de ceva mai mult decât de temperatură, trebuie să controlezi matricea momentelor de ordinul 2. Dar, oricum, esențială e pozitivitatea.

— Stai, stai, ia-mă-ncet, de ce nu-i de-ajuns temperatura?

Explic pe-ndelete. Discutăm, ne contrazicem. Tabla dă pe-a-fără de simboluri matematice, Clément vrea să știe mai mult despre pozitivitate. Cum să arătăm pozitivitatea strictă fără margini de regularitate? Se poate?

— Nu-i așa de șocant, dacă stai să te gândești, ciocnirile produc margini inferioare, la fel transportul într-un domeniu învecinat, lucrurile se leagă; cele două efecte ar trebui să se potenteze reciproc, altfel se cheamă că avem ghinion. A încercat pe vremuri Berndt, dar s-a lăsat. Bun, sunt o groază care au încercat, fără succes, dar tot e plauzibil.

— Ești sigur că transportul va duce la pozitivitate fără regularitate? Totuși, fără ciocniri, transporti valoarea densității, n-are cum să devină mai pozitivă...

— Da, dar când mediezi după viteze întărești pozitivitatea... cam ca în lemele de medii cinematice, dar acolo n-ai regularitate, e pozitivitate. E drept că nimeni nu s-a prea uitat la asta așa. Asta-mi aduce aminte... uite, acum doi ani, la Princeton,

un postdoc chinez mi-a pus o întrebare cam de felul ăsta. Iei o ecuație de transport, să zicem că în tor, presupui regularitate zero, vrei să arăți că densitatea spațială devine strict pozitivă. Fără regularitate! Știa s-o facă pentru transportul liber, sau pentru ceva mai general în timp scurt, dar la timp mai lung se bloca... Am transmis și altora întrebarea lui, dar n-am primit nici un răspuns convingător.

— Stai, stai, zi-mi întâi cum faci cu nemernicul de transport liber.

Transportul liber e termenul care, în jargonul nostru, desemnează un gaz ideal în care particulele nu interacționează. Un model atât de simplificat, încât nu e deloc realist, dar se pot învăța foarte multe din el.

— Păi, cu soluția explicită ar trebui să meargă, stai un pic, să-ncercăm s-o refacem.

Ne apucăm de treabă, separat, încercăm să refacem raționamentul pe care trebuie să-l fi făcut Dong Li. Nu e un rezultat major, mai degrabă e un mic exercițiu. Dar poate că pricepând soluția acestui mic exercițiu o să ne înscriem pe drumul cel bun pentru rezolvarea mării enigme. Și-apoi, e ca un joc! După câteva minute de scris în tăcere, câștig.

— Cred c-am făcut-o.

Trec la tablă să-mi expun soluția, ca la seminar.

— Descompunem soluția conform cōpiilor torului... schimbăm variabila în fiecare bucată... iese-n față un iacobian, folosești regularitatea Lipschitz... până la urmă găsești o convergență în $1/t$ („unu pe t “). E încet, dar sună bine.

— Aha, deci n-ai regularizare... obții convergența cu media... media

Clément raționează cu voce tare la calculele mele. Dintr-odată are o revelație, e excitat și arată cu degetul spre tablă:

— Păi, atunci ar trebui să vedem dacă asta nu se poate folosi pentru efectul de damping Landau!

M-a dat gata. Trei secunde de liniște. Sentimentul vag că e ceva important.

Cer explicații, Clément e tulburat, agitat, îmi spune că demonstrația asta îi amintește o discuție avută cu trei ani în urmă cu un alt cercetător de origine chineză, Yan Guo, la Universitatea Brown, pe Coasta de Est a Statelor Unite.

— În amortizarea Landau, căutăm o relaxare pentru o ecuație reversibilă...

— Da, da, știu, dar nu intervine și interacția? Nu e un Vlasov, aici e doar transport liber!

— Poate că interacția are rolul ei, da, dar... ar trebui să fie exponențială, convergența. Crezi că $1/t$ e optimal?

— Sună bine, nu-i așa?

— Și dacă regularitatea ar fi mai puternică? N-ar fi mai bine?

— Hmmmm.

Mormăi. Amestec de neîncredere și de concentrare, de interes și de frustrare.

După câteva clipe de tăcere, priviri fixe și buze strânse, reluăm discuția... Oricât de pasionantă ar fi mitica (și mistica?) amortizare Landau, ea n-are nimic de-a face cu proiectul nostru de cercetare inițial; după câteva minute, trecem la altceva. Discuția mai continuă mult, trecem de la o noțiune matematică la alta. Luăm notițe, argumentăm, ne indignăm, învățăm, pregătim un plan de atac. Totuși, când ne despărțim, amortizarea Landau e pe lunga noastră listă de teme pentru acasă.

*

Ecuația lui Boltzmann,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} |v - v_*| \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] dv_* d\sigma,$$

descoperită pe la 1870, modelează evoluția unui gaz rarefiat, format din miliarde și miliarde de particule care se izbesc una de alta; reprezentăm distribuția statistică a pozițiilor și

vitezelor acestor particule printr-o funcție $f(t,x,v)$ care la timpul t indică densitatea de particule a căror poziție e (aproximativ) x și a căror viteză e (aproximativ) v .

Ludwig Boltzmann a descoperit noțiunea statistică de entropie, sau dezordine, a unui gaz:

$$S = - \iint f \log f \, dx \, dv;$$

folosindu-și ecuația, a demonstrat că, pornind dintr-o stare inițială oarecare, entropia nu poate decât să crească în timp, niciodată să scadă. În termeni metaforici, lăsat în voia lui, gazul devine, în mod spontan, din ce în ce mai dezordonat, iar evoluția aceasta e ireversibilă.

Cu creșterea entropiei, Boltzmann regăsea o lege descoperită experimental câteva zeci de ani mai devreme și cunoscută sub numele de al doilea principiu al termodinamicii; dar îi adăuga câteva contribuții conceptuale excepționale. În primul rând, înlocuia o lege empirică, observată experimental și ridicată la rang de principiu, cu o demonstrație argumentată; apoi, introducea o interpretare matematică, extraordinar de fecundă, a misterioasei entropii; în fine, reconcilia fizica microscopică – imprevizibilă, haotică și reversibilă – cu o fizică macroscopică previzibilă, stabilă și ireversibilă. Contribuțiile acestea i-au adus lui Boltzmann un loc de cinste în panteonul fizicii teoretice, precum și atenția mereu reînnoită a filozofilor și epistemologilor.

Apoi, Boltzmann a definit starea de echilibru a unui sistem statistic ca starea de entropie maximă, fondând astfel imensul domeniu al fizicii statistice a echilibrului: cea mai naturală e starea de dezordine.